CM 2 : Dérivées, Primitives et Intégrales

Définition, calcul et applications

Hugo Rositi

Le Puy-en-Velay, le 21 septembre 2017

hugo.rositi@uca.fr

Plan

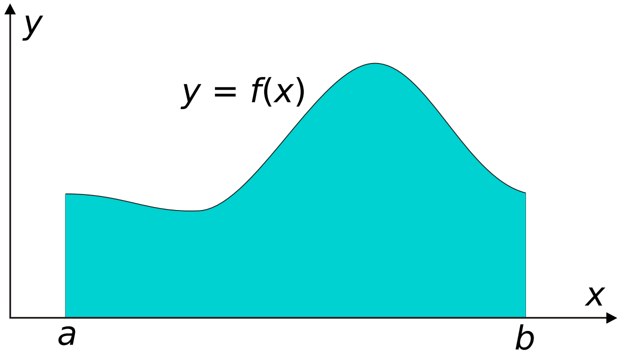
Historique de la dérivation

Figure – René Descartes, 1596–1650

- Fait le lien entre les courbes géométriques et des couples arithmétiques.
- Naissance des équations algébriques. (Géométrie analytique)
- Repère cartésien

Historique de la dérivation (2)

- Évolution des courbes (milieu du XVII siècle).
- Mesure de pentes.
- Bataille pour la paternité de la théorie.



Historique de la dérivation (3)

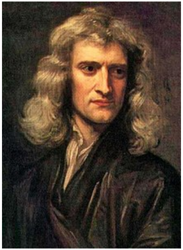


FIGURE – Isaac Newton, 1642–1727

- Découvre le calcul différentiel en 1665.
- 1687 : Publie son *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

FIGURE – Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716

- Découvre le calcul différentiel en 1675.
- Publie peu de temps après 1684–1686.

Définition de la dérivée

Définition géométrique

Coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction étudiée.

Définition algébrique

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

Tangente à un point

Équation de la tangente au point a

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Propriétés de la dérivée

$\forall f, g \in \mathcal{C}^1$ (continues et dérivables)

Linéarité	$(af)' = af'$	$\forall a \in \mathbb{R}$
Produit	$(fg)' = f'g + fg'$	Quelles que soient les fonctions f et g.
Quotient	$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$	Quelles que soient f dérivable et g qui ne s'annule pas.
Composée	$(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$	Quelles que soient f et g, dérivables et composables.

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Fonction dérivée $f'(x)$
$k \in \mathbb{R}$	0
x	1
$a.x$	a
x^2	$2x$
$x^n, n \in \mathbb{Z}$	$n.x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$exp(x)$	$exp(x)$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Exemple de calcul de dérivée

$$f(x) = x^5 - x^2 + 112$$

Exemple de calcul de dérivée

$$f(x) = x^5 - x^2 + 112$$

- $f'(x) = 5x^4 + \cdots$

Exemple de calcul de dérivée

$$f(x) = x^5 - x^2 + 112$$

- $f'(x) = 5x^4 + \cdots$
- $f'(x) = 5x^4 - 2x + \cdots$

Exemple de calcul de dérivée

$$f(x) = x^5 - x^2 + 112$$

- $f'(x) = 5x^4 + \cdots$
- $f'(x) = 5x^4 - 2x + \cdots$
- $f'(x) = 5x^4 - 2x + 0$

Exemple de calcul de dérivée

$$f(x) = x^5 - x^2 + 112$$

- $f'(x) = 5x^4 + \cdots$
- $f'(x) = 5x^4 - 2x + \cdots$
- $f'(x) = 5x^4 - 2x + 0$

$$g(x) = 20x^3 + \frac{x^2}{3} - 23$$

Exemple de calcul de dérivée

$$f(x) = x^5 - x^2 + 112$$

- $f'(x) = 5x^4 + \cdots$
- $f'(x) = 5x^4 - 2x + \cdots$
- $f'(x) = 5x^4 - 2x + 0$

$$g(x) = 20x^3 + \frac{x^2}{3} - 23$$

- $g'(x) = 20.3x^2 + \cdots$

Exemple de calcul de dérivée

$$f(x) = x^5 - x^2 + 112$$

- $f'(x) = 5x^4 + \cdots$
- $f'(x) = 5x^4 - 2x + \cdots$
- $f'(x) = 5x^4 - 2x + 0$

$$g(x) = 20x^3 + \frac{x^2}{3} - 23$$

- $g'(x) = 20.3x^2 + \cdots$
- $g'(x) = 60x^2 + \frac{2x}{3} + \cdots$

Exemple de calcul de dérivée

$$f(x) = x^5 - x^2 + 112$$

- $f'(x) = 5x^4 + \cdots$
- $f'(x) = 5x^4 - 2x + \cdots$
- $f'(x) = 5x^4 - 2x + 0$

$$g(x) = 20x^3 + \frac{x^2}{3} - 23$$

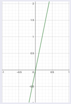
- $g'(x) = 20.3x^2 + \cdots$
- $g'(x) = 60x^2 + \frac{2x}{3} + \cdots$
- $g'(x) = 60x^2 + \frac{2x}{3} + 0$

Évolution d'une courbe

Fonction croissante

Une fonction $f : \mathbb{I}_1 \to \mathbb{I}_2$ est dite croissante si :

$$\forall x, y \in \mathbb{I}_1, x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$$

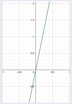


Évolution d'une courbe

Fonction croissante

Une fonction $f : \mathbb{I}_1 \to \mathbb{I}_2$ est dite croissante si :

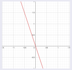
$$\forall x, y \in \mathbb{I}_1, x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$$



Fonction décroissante

Une fonction $f : \mathbb{I}_1 \to \mathbb{I}_2$ est dite décroissante si :

$$\forall x, y \in \mathbb{I}_1, x \leq y \iff f(x) \geq f(y)$$

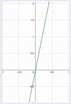


Évolution d'une courbe

Fonction croissante

Une fonction $f : \mathbb{I}_1 \to \mathbb{I}_2$ est dite croissante si :

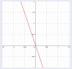
$$\forall x, y \in \mathbb{I}_1, x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$$



Fonction décroissante

Une fonction $f : \mathbb{I}_1 \to \mathbb{I}_2$ est dite décroissante si :

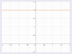
$$\forall x, y \in \mathbb{I}_1, x \leq y \iff f(x) \geq f(y)$$



Fonction constante

Une fonction $f : \mathbb{I}_1 \to \mathbb{I}_2$ est dite constante si :

$$\forall x, y \in \mathbb{I}_1, x \neq y \iff f(x) = f(y)$$



Évolution d'une courbe

Utilité

La dérivée d'une fonction, permet de déterminer l'évolution de la courbe.

Fonction croissante

Une fonction croissante sur une partie de son ensemble de définition aura une dérivée **positive** sur cet ensemble.

Fonction décroissante

Une fonction décroissante sur une partie de son ensemble de définition aura une dérivée **négative** sur cet ensemble.

Fonction constante

Une fonction constante sur une partie de son ensemble de définition aura une dérivée **nulle** sur cet ensemble.

Fonction croissante

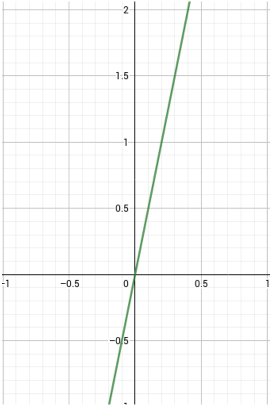


FIGURE – Courbe représentative de la fonction $f(x) = 5x$

- $f'(x) = 5$ donc positive

Fonction décroissante

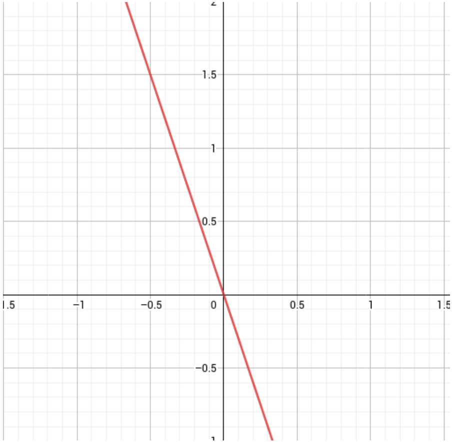


FIGURE – Courbe représentative de la fonction $f(x) = -3x$

- $f'(x) = -3$ donc négative

Fonction constante

FIGURE – Courbe représentative de la fonction $f(x) = 2$

- $f'(x) = 0$ donc nulle

Exemple d'étude de fonction

$$f(x) = x^2 - 6x + 4$$

Exemple d'étude de fonction

$$f(x) = x^2 - 6x + 4$$

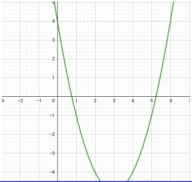
1. $f'(x) = 2x - 6$
2. $f'(x)$ s'annule pour $x = 3$.
3. $f'(x) \geq 0$ pour $x > 3$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x < 3$.

Exemple d'étude de fonction

$$f(x) = x^2 - 6x + 4$$

1. $f'(x) = 2x - 6$
2. $f'(x)$ s'annule pour $x = 3$.
3. $f'(x) \geq 0$ pour $x > 3$ et $f'(x) \leq 0$ pour $x < 3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-5	$\nearrow$	



Second exemple

$$g(x) = 6x + \frac{4}{x} + 2$$

Second exemple

$$g(x) = 6x + \frac{4}{x} + 2$$

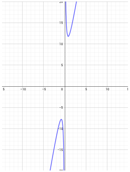
1. $g'(x) = 6 - \frac{4}{x^2}$
2. $g'(x)$ s'annule pour $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.
3. $g'(x) \geq 0$, pour $x \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$, $x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}$
4. $g'(x) \leq 0$ pour $x \in \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right] \backslash \{0\}$.

Second exemple

$$g(x) = 6x + \frac{4}{x} + 2$$

1. $g'(x) = 6 - \frac{4}{x^2}$
2. $g'(x)$ s'annule pour $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.
3. $g'(x) \geq 0$, pour $x \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$, $x \leq -\sqrt{\frac{2}{3}}$
4. $g'(x) \leq 0$ pour $x \in \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{\frac{2}{3}}\right] \backslash \{0\}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	-	$\Vert$	-	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	



Applications

- Biologie : dynamique des populations *e.g.* éléphants.

Applications

- Biologie : dynamique des populations *e.g.* éléphants.

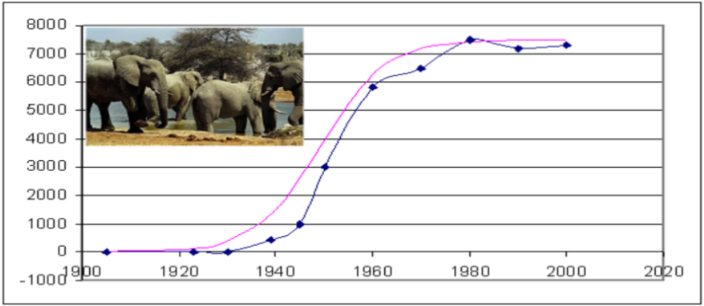


FIGURE – Évolution de la population d'éléphants dans une région africaine selon les années.

Applications

- Biologie : dynamique des populations *e.g.* éléphants.
- Physique : variation de grandeur (vitesse, accélération, *etc.*).

Applications

- Biologie : dynamique des populations *e.g.* éléphants.
- Physique : variation de grandeur (vitesse, accélération, *etc.*).
- Économie : optimisation de coût et de bénéfices.

Applications

- Biologie : dynamique des populations *e.g.* éléphants.
- Physique : variation de grandeur (vitesse, accélération, *etc.*).
- Économie : optimisation de coût et de bénéfices.
- Informatique : détection de contours.

FIGURE – Recherche des contours sur une image

Les primitives

Définition

La primitive F d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle I est définie comme suit :

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

Remarque

La fonction F est définie et dérivable sur I et sa dérivée est la fonction f.

Sémantiquement

On peut dire que la primitive est le contraire de la dérivée.

Primitives des fonctions usuelles

F(x)	f(x)
$a.x$	a
$\frac{x^2}{2}$	x
$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	x^n
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$exp(x)$	$exp(x)$

Exemples

$$f(x) = 6x^5 - 3x^2 + 12$$

Exemples

$$f(x) = 6x^5 - 3x^2 + 12$$

- $F(x) = x^6 + \cdots$

Exemples

$$f(x) = 6x^5 - 3x^2 + 12$$

- $F(x) = x^6 + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + \cdots$

Exemples

$$f(x) = 6x^5 - 3x^2 + 12$$

- $F(x) = x^6 + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + 12x + \cdots$

Exemples

$$f(x) = 6x^5 - 3x^2 + 12$$

- $F(x) = x^6 + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + 12x + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + 12x + c$

Exemples

$$f(x) = 6x^5 - 3x^2 + 12$$

- $F(x) = x^6 + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + 12x + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + 12x + c$

$$g(x) = x^4 + 2x^2$$

Exemples

$$f(x) = 6x^5 - 3x^2 + 12$$

- $F(x) = x^6 + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + 12x + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + 12x + c$

$$g(x) = x^4 + 2x^2$$

- $G(x) = \frac{x^5}{5} + \cdots$

Exemples

$$f(x) = 6x^5 - 3x^2 + 12$$

- $F(x) = x^6 + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + 12x + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + 12x + c$

$$g(x) = x^4 + 2x^2$$

- $G(x) = \frac{x^5}{5} + \cdots$
- $G(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + \cdots$

Exemples

$$f(x) = 6x^5 - 3x^2 + 12$$

- $F(x) = x^6 + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + 12x + \cdots$
- $F(x) = x^6 - x^3 + 12x + c$

$$g(x) = x^4 + 2x^2$$

- $G(x) = \frac{x^5}{5} + \cdots$
- $G(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + \cdots$
- $G(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + c$

Intégration

Contexte général

- Le calcul des intégrales est fondamental dans de nombreux domaines tels que la mesure des grandeurs (longueur de courbe, aire, flux, volume, *etc.*) ou encore le calcul des probabilités (densité de probabilités).

Contexte géométrique

- En mathématiques, le calcul de l'intégrale d'une fonction peut se voir comme le calcul de l'aire sous la courbe représentative de cette fonction.

Intégration

Contexte général

- Le calcul des intégrales est fondamental dans de nombreux domaines tels que la mesure des grandeurs (longueur de courbe, aire, flux, volume, *etc.*) ou encore le calcul des probabilités (densité de probabilités).

Contexte géométrique

- En mathématiques, le calcul de l'intégrale d'une fonction peut se voir comme le calcul de l'aire sous la courbe représentative de cette fonction.

Définition mathématiques

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Représentation visuelle

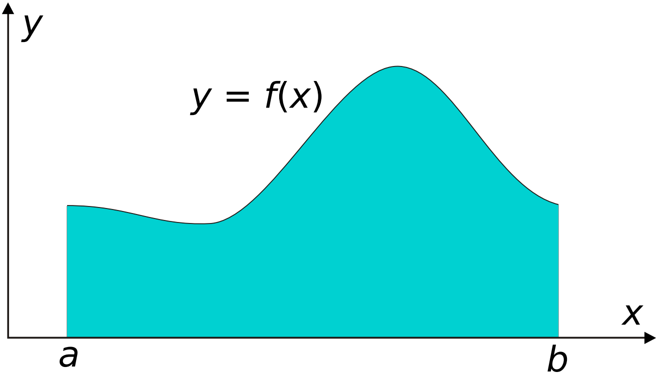


FIGURE – Intégrale de la fonction $f(x)$, représentée par l'aire sous la courbe.

Exemple de calcul

$$\int_{2}^{6} 3x^2 dx$$

Exemple de calcul

$$\int_2^6 3x^2 dx$$

1. Quelle est la primitive de $f(x) = 3x^2$?

Exemple de calcul

$$\int_2^6 3x^2 dx$$

1. Quelle est la primitive de $f(x) = 3x^2$?
2. $F(x) = x^3$

Exemple de calcul

$$\int_2^6 3x^2 dx$$

1. Quelle est la primitive de $f(x) = 3x^2$?
2. $F(x) = x^3$
3. $F(6) = 6^3 = 216\,;\ F(2) = 2^3 = 8$

Exemple de calcul

$$\int_2^6 3x^2 dx$$

1. Quelle est la primitive de $f(x) = 3x^2$?
2. $F(x) = x^3$
3. $F(6) = 6^3 = 216\,;\ F(2) = 2^3 = 8$
4. $\int_2^6 f(x)dx = \left[x^3\right]_2^6 = F(6) - F(2) = 216 - 8 = 208$

Signe de l'intégrale

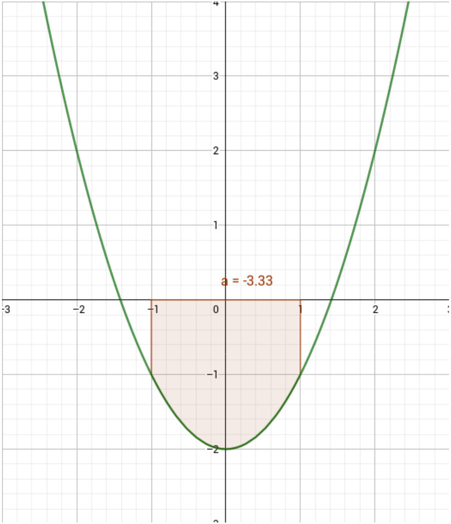


FIGURE – Intégrale de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ sur l'intervalle $I = [-1; 1]$

Signe de l'intégrale

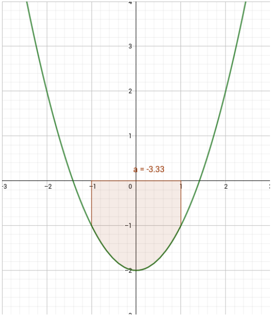


FIGURE – Intégrale de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ sur l'intervalle $I = [-1; 1]$

$$\int_{-1}^{1} x^2 - 2 \, dx$$

Signe de l'intégrale

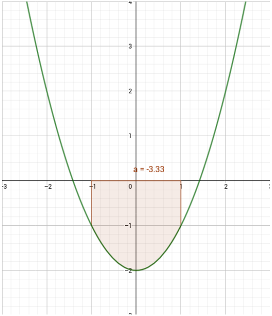


FIGURE – Intégrale de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ sur l'intervalle $I = [-1; 1]$

$$\int_{-1}^{1} x^2 - 2 \, dx$$

- $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + 0$

Signe de l'intégrale

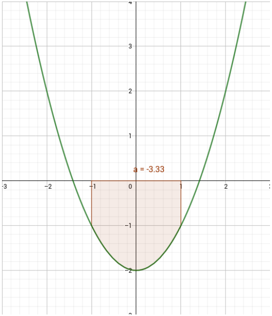


FIGURE – Intégrale de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ sur l'intervalle $I = [-1; 1]$

$$\int_{-1}^{1} x^2 - 2 \; dx$$

- $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + 0$
- $F(1) - F(-1) = -\frac{5}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{10}{3} \approx -3.33$

Signe de l'intégrale

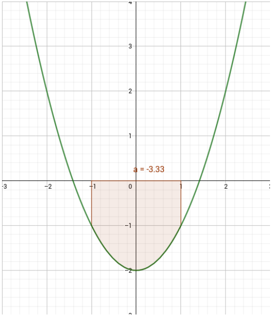


FIGURE – Intégrale de la fonction $f(x) = x^2 - 2$ sur l'intervalle $I = [-1; 1]$

$$\int_{-1}^{1} x^2 - 2 \, dx$$

- $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x + 0$
- $F(1) - F(-1) = -\frac{5}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{10}{3} \approx -3.33$
- On dira que l'aire sous la courbe est négative.

Propriétés des intégrales

- $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

Propriétés des intégrales

- $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

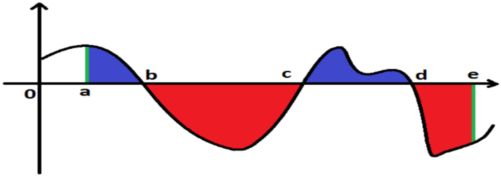
- $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$

Propriétés des intégrales

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

- $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ (relation de Chasles)



Propriétés des intégrales

- $\int_a^a f(x)\ dx = 0$
- $\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx$
- $\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx$ (relation de Chasles)
- $\forall k \in \mathbb{R}, \int_a^b k.f(x)\ dx = k \int_a^b f(x)\ dx$ (linéarité)

Propriétés des intégrales

- $\int_a^a f(x)\ dx = 0$
- $\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx$
- $\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx$ (relation de Chasles)
- $\forall k \in \mathbb{R}, \int_a^b k.f(x)\ dx = k \int_a^b f(x)\ dx$ (linéarité)
- $\int_a^b (f(x) + g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$ (linéarité)

Intégration par parties

Soient u, v deux fonctions de $\mathcal{C}^1$ (*e.g.* continues et dérivables sur $[a; b]$).
Alors on a :

Intégration par parties (ipp.)

$$\int_a^b u(x)v'(x)\ dx = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\ dx$$

Exemple d'utilisation d'une ipp.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos(x) \; dx$$

Exemple d'utilisation d'une ipp.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\ dx$$

- Procédons par une ipp. avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos(x)$

Exemple d'utilisation d'une ipp.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\ dx$$

- Procédons par une ipp. avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos(x)$
- $S = \Big[x\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} sin(x)\ dx$

Exemple d'utilisation d'une ipp.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos(x)\ dx$$

- Procédons par une ipp. avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos(x)$
- $S = \Big[x \sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} sin(x)\ dx$
- $\Big[x \sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}.\sin(\frac{\pi}{3}) - 0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

Exemple d'utilisation d'une ipp.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\ dx$$

- Procédons par une ipp. avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos(x)$
- $S = \Big[x\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} sin(x)\ dx$
- $\Big[x\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}.\sin(\frac{\pi}{3}) - 0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$
- $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin(x) = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$

Exemple d'utilisation d'une ipp.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\ dx$$

- Procédons par une ipp. avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos(x)$
- $S = \Big[x\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} sin(x)\ dx$
- $\Big[x\sin(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}.\sin(\frac{\pi}{3}) - 0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$
- $\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin(x) = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$
- $S = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$

Changement de variables

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et φ une fonction continue et dérivable. Alors par changement de variable on a :

Changement de variable $x = \varphi(t)$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b \varphi'(t) f(\varphi(t))\, dt$$

Exemple d'utilisation d'un changement de variable

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\ dx$$

Exemple d'utilisation d'un changement de variable

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\, dx$$

- Procédons par un changement de variable avec $\varphi(t) = 2t$ et $f = cos(t)$.

Exemple d'utilisation d'un changement de variable

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\, dx$$

- Procédons par un changement de variable avec $\varphi(t) = 2t$ et $f = cos(t)$.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(x))\, dx$$

Exemple d'utilisation d'un changement de variable

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\ dx$$

- Procédons par un changement de variable avec $\varphi(t) = 2t$ et $f = cos(t)$.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(x))\ dx$$

- $S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2.f(\varphi(x))\ dx$

Exemple d'utilisation d'un changement de variable

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\, dx$$

- Procédons par un changement de variable avec $\varphi(t) = 2t$ et $f = cos(t)$.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(x))\, dx$$

- $S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2.f(\varphi(x))\, dx$
- $S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(x)\, dx$

Exemple d'utilisation d'un changement de variable

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\ dx$$

- Procédons par un changement de variable avec $\varphi(t) = 2t$ et $f = cos(t)$.

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(x))\ dx$$

- $S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2.f(\varphi(x))\ dx$
- $S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(x)\ dx$
- $S = \frac{1}{2} \Big[\sin(x) \Big]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \Big(\sin(\pi) - \sin(0) \Big) = 0$

Filtrage en image

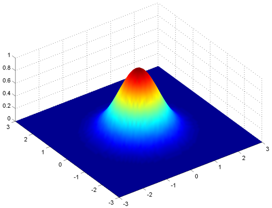


FIGURE – Fonction gaussienne en 2D

Opération de convolution :

Filtrage par un noyau.

FIGURE – Filtrage d'une image par un noyau gaussien

Filtrage en image

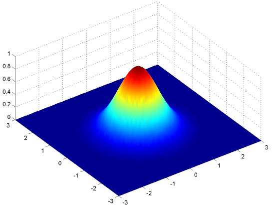


FIGURE – Fonction gaussienne en 2D

Opération de convolution :

Filtrage par un noyau.

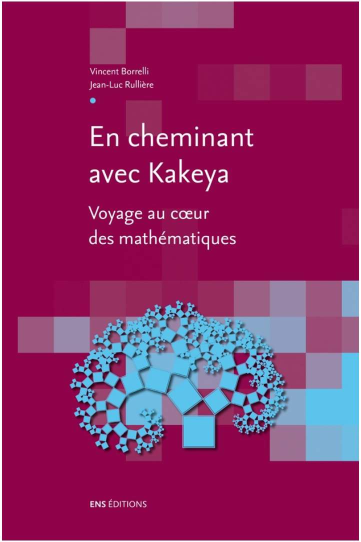
FIGURE – Filtrage d'une image par un noyau gaussien

Produit de convolution

Le produit de convolution est défini par la formule :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt$$

En cheminant avec Kakeya



- Prix tangente 2015
- De la dérivation au calcul intégral (pp. 25–67)
- Site de l'éditeur→Compléments → Version PDF

Bibliographie

Vincent Borrelli, Jean-Luc Rullière, En cheminant avec Kakeya, ENS Éditions, 2014.